Exercice 1

Soit E espace euclidien, soit $a \in E$ unitaire. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $f_\alpha : E \to E$ par

$$\forall x \in E, f_\alpha(x) = x + \alpha(x|a)a.$$

1. Montrer que $\{f_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable par composition.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est une isométrie.
3. Déterminer les éléments propres de f_α.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $E_n = \left\{P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)Q(t)dt = 0\right\}$.

1. Montrer que E_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \cap E_n$ unitaire.

Exercice 3

Soit E espace euclidien muni d'une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit l'application linéaire f_σ par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. On définit $p = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 4

Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (M, N) \in E^2, \varphi(M, N) = \mathrm{tr}({}^tMN).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soient $D = \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), E = \mathbb{R}I_n$. Déterminer $D^\perp$ et $E^\perp$.